

Formulario de Transformadas de Funciones

1. Transformada de Laplace

Definición:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

Propiedades Fundamentales:

- **Linealidad:**
 $\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} = aF(s) + bG(s)$
- **1er Teorema de Traslación (eje s):**
 $\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = F(s - a)$
- **2do Teorema de Traslación (eje t):**
 $\mathcal{L}\{f(t - a)u(t - a)\} = e^{-as}F(s)$
- **Derivada de una función:**
 $\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$
 $\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$
- **Derivada de la transformada:**
 $\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$
- **Integral de una función:**
 $\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s}$
- **Teorema de Convolución:**
 $\mathcal{L}\{f(t) * g(t)\} = F(s)G(s)$

2. Transformadas Comunes

Función $f(t)$	Transformada $F(s)$
1	$\frac{1}{s}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\sin(kt)$	$\frac{k}{s^2+k^2}$
$\cos(kt)$	$\frac{s}{s^2+k^2}$
$\sinh(kt)$	$\frac{k}{s^2-k^2}$
$\cosh(kt)$	$\frac{s}{s^2-k^2}$
$e^{at} \sin(kt)$	$\frac{k}{(s-a)^2+k^2}$
$e^{at} \cos(kt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+k^2}$
$u(t-a)$	$\frac{e^{-as}}{s}$
$\delta(t-a)$	e^{-as}

3. Series de Fourier

Para una función $f(t)$ con periodo $T = 2L$:

Forma Trigonométrica:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right) \right]$$

Coefficientes:

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) dt$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt$$

Forma Exponencial Compleja:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi t}{L}}$$

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) e^{-i\frac{n\pi t}{L}} dt$$

4. Transformada de Fourier

Definición e Inversa:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

Propiedades:

- **Desplazamiento en t:**
 $\mathcal{F}\{f(t - t_0)\} = e^{-i\omega t_0} F(\omega)$
- **Desplazamiento en ω :**
 $\mathcal{F}\{e^{i\omega_0 t} f(t)\} = F(\omega - \omega_0)$
- **Escalamiento:**
 $\mathcal{F}\{f(at)\} = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$
- **Derivación en t:**
 $\mathcal{F}\{f^{(n)}(t)\} = (i\omega)^n F(\omega)$

5. Transformada Z

Para una secuencia discreta $x[n]$: **Definición:**

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

Pares Comunes:

$$\delta[n] \longleftrightarrow 1$$

$$u[n] \longleftrightarrow \frac{z}{z-1} \quad (|z| > 1)$$

$$a^n u[n] \longleftrightarrow \frac{z}{z-a} \quad (|z| > |a|)$$

$$na^n u[n] \longleftrightarrow \frac{az}{(z-a)^2} \quad (|z| > |a|)$$